メルカトルの級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\log 2 \qquad \cdots(*)$$

山脇の超数学講座 No. 49

今回は，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，……という自然数の数列に，初項から順に (-1) をかけていったものの逆数をとって，無限に加えていくと $\log 2$ に近づいていくという「メルカトルの級数」を証明します。

$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6\ \cdots\cdots$ 【自然数列に順に (-1) をかける】

$\times(-1)\quad \times(-1)\quad \times(-1)\quad \times(-1)\quad \times(-1)$

この数列の第 n 項は $(-1)^{n-1}n$ と書けるので，その逆数の無限級数の和に記号 Σ を使うと，$(*)$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2$ と書ける。この結果の $\log 2$ の底は「ネイピア数 e」($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) であり，$\log 2$ は「e を何乗したら 2 になるか」という数。なお，メルカトルは，「メルカトル図法」で知られる地理学者のゲラルドゥス･メルカトル（1512～1594）ではなく，著書『対数術』で知られる17世紀の数学者ニコラス･メルカトル(1620～1687)である。彼は『対数術』の中でこの級数を紹介した。

証明 まず，初項1，公比 $-x$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を考える。

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots+(-x)^{n-1}=\frac{1\cdot\{1-(-x)^n\}}{1-(-x)}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

今，①の両辺を $x=0$ から $x=1$ まで積分すると，

$$\int_0^1\{1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots+(-x)^{n-1}\}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx \quad \cdots\cdots ②$$

②の左辺 $=\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right]_0^1=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

②の右辺 $=[\log|1+x|]_0^1-(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$

②の左辺は，無限級数 $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots\cdots$ の部分和であるから，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}(②の左辺)$ となる。

ここで，積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，まず $1+x\geqq 1$ だから，$0<\dfrac{1}{1+x}\leqq 1$

辺々に $x^n\geqq 0$ をかけて，$0\leqq\dfrac{x^n}{1+x}\leqq x^n$ （等号は $x=0$ のときのみ成立）であるので，

$0<\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx<\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$， さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ だから，

「はさみうちの原理」より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$ が成り立つ。 ゆえに，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(②の右辺)=\lim_{n\to\infty}\left\{\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right\}=\log 2+(-1)^{n+1}\times 0=\log 2$ となり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2$，すなわち，$(*)$ が証明されたのである。 終

$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$ という有理数を無限に加えていくと，$\log 2=0.69314718\cdots$ という無理数に収束する。この驚きの結果が，ライプニッツ(1646～1716)に先んじて，ドイツ出身でイギリスに渡って学んでいた数学者ニコラス･メルカトルによって発表された。$\log 2$ は特別な数であるという印象を持つ。他にも $\log 2$ に収束する級数がある。

例題 極限値 $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めよ。

解答 $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

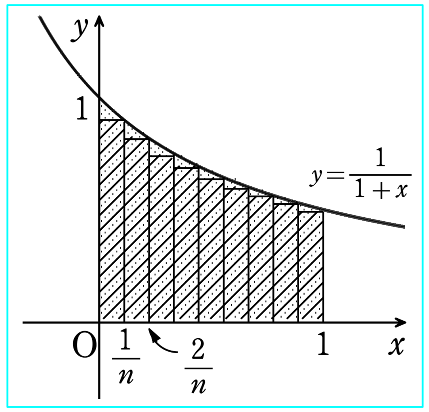
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$

よって，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とすると

$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1$

$=\log 2$ 答 【「区分求積法」を用いた】



コメント 実は，メルカトル級数は，式変形によって**例題**の級数と等しくなるのである。

つまり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$，解説は次の機会とするが，なぜこうなるのか考えてみよう。